L'anneau des matrices circulantes

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste verte : partie **1** et questions **1)** à **3)** de la partie **2**.

— Piste bleue : partie **1** et questions **1)** à **4)** de la partie **2**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Une famille libre de fonctions

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ dont i n'est pas racine pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}.$$

2) Montrer que la famille des dérivées $\left(f^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2 L'anneau des matrices circulantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice circulante* (*de taille* n) toute matrice de la forme $C(x_0,\ldots,x_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{pmatrix}$ avec $x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble de ces matrices et U la matrice $C(0,\ldots,0,1)$.

1) a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension.

b) Compléter pour tous $x_0,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{C}$: $\quad C(x_0,\ldots,x_{n-1})U = C(\,?\,,\ldots,\,?\,) \quad$ et $\quad C(x_0,\ldots,x_{n-1})^\top = C(\,?\,,\ldots,\,?\,)$.

2) a) Montrer que $U^k \in \mathscr{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $\mathscr{C} = \mathbb{C}[U]$ où $\mathbb{C}[U]$ est l'ensemble des polynômes en U — qui ne sont pas des polynômes, attention !

c) En déduire que $\mathscr{C}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3) On pose $\sigma(M) = m_{1,1} + \ldots + m_{1,n}$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, puis $\mathscr{K} = \left\{M \in \mathscr{C} \mid \quad \sigma(M) = 0\right\}$.

a) Montrer que σ est *linéaire*, i.e. que pour tous $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\quad \sigma(\lambda M + \mu N) = \lambda\sigma(M) + \mu\sigma(N)$.

b) Montrer que $\mathscr{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. Est-ce un sous-anneau de $\mathscr{C}$?

c) Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{K} \oplus \mathrm{Vect}(U)$. Que vaut la dimension de $\mathscr{K}$?

4) On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, puis pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\Omega\overline{\Omega} = \overline{\Omega}\Omega = nI_n$, où la barre désigne une conjugaison coefficient par coefficient.

b) Montrer que pour tous $M \in \mathscr{C}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\quad MX_k = \sigma_k(M)X_k \quad$ pour un certain $\sigma_k(M) \in \mathbb{C}$ à préciser.

c) En déduire que la matrice $\Omega^{-1}M\Omega$ est diagonale pour tout $M \in \mathscr{C}$.

d) Montrer que pour toute matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: $\quad \Omega D\Omega^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_{k+1,k+1} X_k \overline{X_k}^\top, \quad$ puis que $\Omega D \Omega^{-1} \in \mathscr{C}$.

e) En déduire une caractérisation du groupe $\mathrm{U}(\mathscr{C})$ des inversibles de l'anneau $\mathscr{C}$.

5) On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{C}$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ et calculer sa dimension. Est-ce un sous-anneau de $\mathscr{C}$?